CAPÍTULO 06

Modelos e Programas Discretos e Sequenciais

1. Matemática Discreta

Desde a pré-história o homem vem representando o mundo por meio de imagens que auxiliavam a compreender tudo ao seu redor. Desenhos, mapas, diagramas, esquemas e a criação dos números sempre ajudaram a contar, medir e representar quantidades. Muitos elementos e conceitos matemáticos podem ser visualizados por intermédio das imagens e das produções artísticas realizadas nas artes visuais. Quando estudamos matemática, nos primeiros anos escolares, aprendemos as operações básicas: somar, subtrair, multiplicar e dividir, enfim, aprendemos a fazer contas e lidar com os números em suas características discretas. Neste caso, os números representam objetos pelas quantidades de modo abstrato que permite realizar operações bem definidas.

Ao refletir sobre estes conceitos sentimos a necessidade de visualizar estas entidades e, assim, a fim de melhor compreendê-las, produzimos, gráficos, diagramas, esquemas e modelos imagéticos que nos ajudam a concretizar signos mentais que imaginamos. E, assim, nascem as representações gráficas, geométricas, do espaço e tempo.

Os homens criaram elementos que representam os conceitos abstratos na matemática: criamos o conceito de zero, um e infinito; o sistema decimal e o sistema binário, o conceito de limite, derivada e integral, enfim, criamos representações que determinam e organizam os sistemas matemáticos. Neste processo de elaboração de conhecimento a noção de abstração é fundamental, porque permite o processo de generalização por redução de conteúdo. Utilizamos estes princípios para reter informações relevantes em relação a um determinado fenômeno. A abstração é um processo mental que distancia-se do objeto. É uma operação intelectual, portanto, lógica, que pressupõem a existência de procedimentos que permitem isolar os elementos e produzir generalizações teóricas sobre problemas, a fim de resolvê-los. No processo de abstração usamos estratégias de simplificação das características dos objetos onde os detalhes desnecessários, ambíguos, vagos ou indefinidos são abandonados. Tratamos apenas do que é essencial no objeto para que o modelo elaborado possa funcionar.

No processo de abstração é importante a interação com a materialidade do objeto, com as mídias em que eles são produzidos, com as linguagens e códigos utilizados e, consequentemente, com os signos que usamos que permitem abstrair conceitos e elaborar raciocínios. Quando planejamos algo, nunca conseguimos observar o fenômeno em sua totalidade, os aspectos que consideramos em qualquer tipo de abstração nos fazem elaborar imagens visuais ou mentais que irão auxiliar no planejamento das ações, porém, não representam o objeto integralmente.

2. O ato de contar

Quando estudamos matemática e reconhecemos os números verificamos que eles permitem realizar operações que concretizam conceitos abstratos. Isso evolui da seguinte forma: primeiro consideramos o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, depois verificamos que, se somarmos dois números pertencentes a este conjunto, teremos como resposta um elemento deste mesmo conjunto. Dizemos que o conjunto dos números naturais é fechado em relação à operação de soma. Em seguida, verificamos que ele também é fechado em relação à operação de multiplicação. De fato, se multiplicarmos dois números naturais, teremos sempre como resposta um número natural.

Ao aprofundar os estudos sobre o conjunto dos números naturais, notamos que uma série de propriedades são verdadeiras, tanto para a adição quanto para multiplicação. Verificamos que valem as propriedades comutativas, associativas, elemento neutro e elemento inverso. Na propriedade comutativa podemos trocar a ordem dos números sem que o resultado da soma ou da multiplicação se altere. A propriedade associativa permite que expressões do tipo a, b e c possam ser escritas sem ambiguidade, ou seja, uma soma ou multiplicação de a com b ou de b com c dá o mesmo resultado independente da ordem que seja realizada, isto é, podemos computar a e b e depois c ou b e c e depois a.

Matematicamente escrevemos da seguinte forma:

Seja S um conjunto e f uma operação binária neste conjunto. Dizemos que f é uma operação associativa se:

$$\forall x, y, z \in S \quad f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$$

Note que é importante que f seja uma operação binária, para que o resultado de f(x,y) seja fechado em relação ao conjunto S. Em relação ao número naturais escrevemos do seguinte modo:

$$\left.\begin{array}{l}(x+y)+z = x+(y+z) = x+y+z \\ (x\,y)z = x(y\,z) = x\,y\,z\end{array}\right\} \text{para todo } x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Assim, introduzimos um novo conceito abstrato que irá dar muita consistência ao conjunto dos números naturais, é a "noção de grupo em matemática" que permite relacionar várias estruturas matemáticas. Mais adiante, neste texto, trataremos deste conceito na matemática.

Continuando nosso raciocínio, a partir destes princípios começamos a realizar diversas operações com os números naturais, buscando compreendê-los melhor. Criamos então as operações inversas da soma e da multiplicação, ou seja, a subtração e a divisão, e notamos que a resposta para estas operações nem sempre é um número natural. Por exemplo, quando subtraímos um número natural de outro, onde o primeiro é menor que o segundo observamos que a resposta não é um número natural. Assim, criamos um novo conjunto de números para representar esta situação e dar conta das respostas para estas operações. O conjunto dos números naturais não é fechado em relação à subtração e, assim, concebemos o conjunto dos inteiros que possui os números positivos e negativos: $\mathbb{Z}$ = { ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}.

Em seguida passamos a considerar a operação da divisão e verificamos que ela também não é fechada em relação ao conjunto dos números naturais e nem ao conjunto dos números inteiros. Com isso, criamos um novo conjunto de números: os números racionais: O conjunto dos números racionais (representado por $\mathbb{Q}$) é definido por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,|\, a \in \mathbb{Z} \,;\, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Onde $\mathbb{Z}$* representa o conjunto dos números inteiros sem o zero.

De fato, o conjunto dos números racionais é fechado para a operação de divisão, se não dividirmos por zero. Assim, sucessivamente vamos criando conjunto a conjunto até que, finalmente, criamos o conjunto dos números reais.

O conjunto dos números reais que é representado pela letra $\mathbb{R}$ é uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais. Os números reais são números usados para representar uma quantidade contínua (incluindo o zero e os negativos). Os números reais têm uma correspondência biunívoca com os pontos de uma reta. E aqui verificamos as relações entre álgebra e geometria.

Ao operar com o conjunto dos números reais verificamos que algumas operações não são fechadas em relação aos números reais, por exemplo, a raiz quadrada de número negativo não obtém resposta dentro do conjunto dos números reais. Com isso, novamente, sentimos a necessidade de criar um novo conjunto de números que permitiram dar a resposta a essa operação. Aqui passamos a perceber a existência de relações entre a Matemática Discreta e a Teoria dos Conjuntos.

Nesse momento passamos a perceber as relações entre as várias áreas de conhecimento dentro da matemática e, percebemos as relações entre os conjuntos e a geometria. Verificamos que um número do conjunto dos números complexo pode ser representado através da raiz quadrada de menos um, ou seja, os números complexos podem ser decompostos e uma parte real e outra imaginária. E assim, construímos a relação do conjunto dos números complexos com o plano.

Criamos os pares ordenados. Eles são identificados pela simbologia **(a, b)** e **(x, y)** onde **a** e **x** são as partes reais e **b** e **y** são as partes imaginárias. Estes números também representam a imagem do "plano" que pode ser organizado graficamente através de dois eixos – **X** e **Y** que se cortam perpendicularmente num ponto que pode ser identificado pelo par (0,0) que é a origem dos dois eixos.

Obviamente que ao tratar destes conceitos e modelos matemáticos não estamos sendo rigorosos em relação aos procedimentos e princípios matemáticos, até porque, tornaria esta reflexão demasiadamente extensa e sem sentido para os nossos propósitos.

Assim, agora podemos introduzir a noção de vetor e de coordenadas polares. Identificamos que todo o vetor pode ser representado a partir do ponto de origem dos eixos X e Y, isto é, a partir do par ordenado (0,0) temos uma dimensão e uma direção do vetor que é dado pelo par ordenado final do vetor e por uma direção. Assim, as notações $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ são representações das imagens do Plano, do Espaço na Terceira Dimensão, e da Quarta Dimensão.

Matematicamente podemos operar em dimensões que vão além da dimensão três e que não podemos perceber, no mundo em que vivemos, porque percebemos um mundo em três dimensões. Na verdade, esses signos são apenas representações dos objetos espaciais que, abstratamente, representamos e operarmos com eles. A noção de Quarta Dimensão como sendo a representação do tempo, possibilitou o nascimento da Teoria de Relatividade de Albert Einstein. Ele modificou os conceitos de espaço e tempo, que antes eram observados através da Teoria de Newton como entidades independentes. Assim, introduz a ideia de espaço-tempo como uma grandeza unívoca e geometricamente representada pelo relação de espaço e tempo. O espaço-tempo na Relatividade pode ser considerado como uma representação de quarta dimensão, três dimensões espaciais e uma dimensão temporal, no entanto, integrada, definindo um único conceito.

Na ciência moderna, definida por Galileu, o princípio da relatividade está no movimento. O movimento retilíneo uniforme só tem significado quando é comparado com algum outro ponto de referência. Segundo Galileu, não existe sistema de referência absoluto onde o movimento possa ser medido. Ele referia-se à posição relativa do Sol (ou sistema solar) e das estrelas. As “Transformações de Galileu”, como ficaram conhecidas, eram compostas de cinco leis sobre o movimento. Galileu e Newton não consideravam, para seus cálculos, a propagação eletromagnética porque a luz era tida como algo instantâneo, sem movimento. Os fenômenos de movimento da luz e do som tornavam-se visíveis quando eram observados a longas distâncias, e assim, em fins do século XIX, exigiam padrões de observação específicos e uma teoria do tempo.

Em relação aos Postulados da Relatividade dois pontos devem ser destacados. O Princípio da Relatividade que afirma que as leis que governam as mudanças de estado em quaisquer sistemas físicos tomam a mesma forma em quaisquer sistemas de coordenadas inerciais. Para Einstein, existem os sistemas cartesianos de coordenadas que é denominado de sistemas de inércia. Podemos dizer que: dado uma proposição K em um sistema de inércia, qualquer outro sistema K em movimento de translação uniforme relativo a K, é também um sistema de inércia. O segundo postulado relativo a Borh que trata da invariância da velocidade da luz afirma que ela é igual a c em relação a qualquer sistema de coordenadas inercial. Ou seja, a luz não requer qualquer meio (como o éter) para se propagar. Através das transformações de Lorentz pode-se demonstrar o segundo postulado.

De fato, o "Paradoxo dos Gêmeos" ou "Paradoxo de Langevin" na "Teoria da Relatividade" de Albert Einstein apresenta o seguinte princípio: se considerarmos dois gêmeos, e se um deles for para o espaço na velocidade da luz, eles ficariam com idades diferentes. Dois aspectos podem ser considerados nesta formulação. O primeiro, a partir da mecânica clássica, afirma que a dilatação temporal não existe, o que levaria o gêmeo que viajou na nave estranhar a disparidade dos tempos decorridos experimentados. O gêmeo que viajou pelo universo próximo a velocidade da luz pode alegar que a Terra é que se movia com velocidade próxima à da luz. No entanto, a melhor compreensão desse fenômeno hoje, é que a nave percorreu uma trajetória maior, considerando-se a trajetória no espaço-tempo e a unicidade do conceito espaço-tempo.

3. Definição de Algoritmo Sequencial

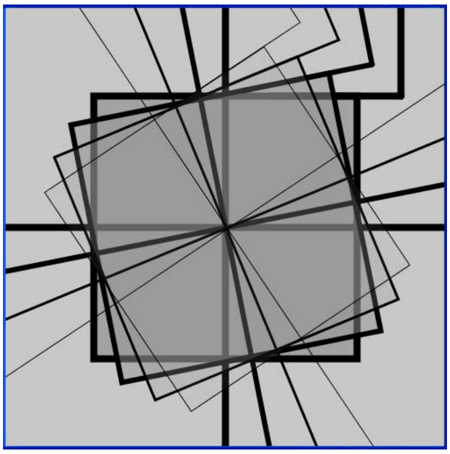
Definir o conceito de Algoritmo sequencial

4. Exercícios e Soluções

- Proposta:

Desenhar retas, elipses utilizando o conceito de rotação e translação - Exercício do desenho em sequencial.

- Solução Exercício 01



```
// Exercício 01 - Usando Figuras, Transparência e Movimentações.
// Definição área de trabalho
size(500,500);
background(200);
//noStroke();
smooth();
rectMode(CORNER);

// quadrado 1
fill(150,190);
strokeWeight(8);
rect(100,100,300,300);
line(300,100,450,100);
line(450,100,450,0);
line(0, 250,500, 250);
line(250,0,250,500);

// quadrado 2
fill(150,127);
rotate(-PI/16);
translate(-53,45);
strokeWeight(6);
rect(100,100,300,300);
line(300,100,450,100);
line(450,100,450,0);
line(-5, 250,505, 250);
line(250,-5,250,505);

// quadrado 3
fill(150,63);
rotate(-PI/16);
```

```
translate(-53,45);
strokeWeight(3);
rect(100,100,300,300);
line(300,100,450,100);
line(450,100,450,-10);
line(-25, 250,525, 250);
line(250,-25,250,525);
fill(150,25);
rotate(-PI/16);
translate(-53,45);
strokeWeight(1);
rect(100,100,300,300);
line(300,100,450,100);
line(450,100,450,-20);
line(-55, 250,555, 250);
line(250,-55,250,555);
```

i. Exercício 02 - Desenhar um cenário 2D.
ii. Exercício 03 – Elaborar
iii. Exercício 04 – Elaborar
iv. Exercício 05 – Elaborar